

**Пояснительная записка**

     **Составлена на основе** сборника программ элективных курсов для предпрофильной и профильной подготовки школы. Тюмень: МОУ ДПО ГИМЦ.

       Понятие параметра является математическим понятием, которое часто используется в школьном курсе математики и в смежных дисциплинах.

   Общеобразовательная программа школьного курса математики не предусматривает решение задач с параметрами, а на вступительных экзаменах в вузы и на ЕГЭ по математике задачи с параметрами присутствуют, решение которых вызывает большие затруднения  учащихся. Задачи с параметрами обладают диагностической и прогностической ценностью, которые позволяют проверить знания основных разделов школьного курса математики, уровень логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности.

     Основная задача курса – познакомить учащихся с общими подходами решения заданий с параметрами, подготовить учащихся таким образом, чтобы они смогли в  атмосфере конкурсного экзамена успешно справиться с задачами, содержащие параметры.

Решить уравнение, определить количество решений, исследовать уравнение, найти положительные корни, доказать, что неравенство не имеет решений и т.д.- все это   варианты параметрических примеров. Поэтому невозможно дать универсальных указаний по решению примеров, в данном курсе рассматриваются различные примеры с решениями. Материал курса представлен по схеме: справочные сведения, примеры с решениями, примеры для самостоятельной  работы, примеры для определения успешности усвоения материала. Решение заданий с параметрами способствуют формированию навыков исследовательской деятельности, интеллектуальному развитию.

**Цели курса:**

  -  систематизировать знания учащихся, полученные в 7 и 8 классах, при решении   линейных уравнений и неравенств;

-  выявить и развить математические способности;

 -  создать целостное представление о решении линейных уравнений и неравенств, содержащих параметры;

   - углубить знания по математике, предусматривающие формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету;

 -обеспечить подготовку к профессиональной деятельности, требующей высокой математической культуры.

**Задачи курса:**

* дополнить знания учащихся по теме «Решение уравнений »;
* расширить и углубить представления учащихся о прие­мах и методах решения уравнений и неравенств с параметрами;
* помочь овладеть рядом технических и интеллектуаль­ных умений на уровне свободного их использования;
* развить интерес и положительную мотивацию изучения алгебры.

**Место курса в Учебном плане школы**

* Согласно Распоряжению правительства Тюменской области №2162-рп от 22 октября 2012 года «О мерах по дальнейшему развитию в Тюменской области системы выявления и поддержки талантливых детей» школа обеспечивает дополнительную подготовку обучающихся по предметам математика и физика. Предметный курс реализуется за счет компонента образовательного учреждения в Учебном плане школы (часть для реализации углубленной (дополнительной) подготовки).

**Содержание программы**

Тема 1. Решение линейных уравнений и неравенств.

Тема 2. Первоначальные сведения о задачах с параметром.

  Тема 3. Понятие  параметра. Что означает «решить задачу с параметром»? Основные типы задач с параметром. Основные способы решения задач с параметром.

 Примеры решения линейных уравнений с параметром.

Тема 4. Решение линейных неравенств, содержащих параметры.

          Примеры решения линейных неравенств с параметром.

Тема5. Решение заданий из ГИА(ОГЭ), ЕГЭ

**Учебно-тематический план**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №п/п | Тема | Кол-вочасов | Виды  деятельности |
| 1. |  Решение линейных уравнений различными методами | 2 | Практикум |
| 2. | Первоначальные сведения об уравнениях с параметром. | 2 | Семинар |
| 3. | Решение линейных уравнений с параметром. | 6 | Исследовательская работа; отработка навыков; самостоятельная работа. |
| 4. | Решение уравнений с модулем, содержащих параметры. | 4 | Практикум |
| 5. | Решение линейных неравенств, содержащих параметры. | 6 | Исследовательская работа;  отработка навыков; самостоятельная работа. |
| 6. | Решение уравнений с модулем, содержащих параметры. | 4 | Практикум |
| 7. | Графический способ решения уравнений с параметром | 6 | Практикум |
| 8. | Решение заданий ОГЭ | 4 | Практикум |

**Дидактический материал к элективному курсу**

«Решение уравнений и неравенств с параметром»

Тема 1. Примеры для этой темы.

Тема 2. Примеры, где учащиеся уже встречались с параметрами:

- Функция прямая пропорциональность: у = kx (х и у – переменные; k – параметр, k ≠ 0);

- Функция обратной пропорциональности: у = k/х (х и у – переменные, k – параметр, k ≠ 0)

- Линейная функция: у = kх + b (х и у – переменные; k и b – параметры);

- Линейное уравнение: ах + b = 0 (х – переменная; а и b – параметры);

-  Квадратное уравнение ах2 + bх + с = 0 (х – переменная; а, b и c – параметры,

 а ≠ 0).

Что такое параметр?

          Если в уравнение или неравенство некоторые коэффициенты заменены не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются параметрами, а  уравнение или неравенство параметрическим.

          Параметры обычно обозначаются первыми буквами латинского алфавита: а, в, с, … или а1, а2, а3, … , а неизвестные последними буквами латинского алфавита х, у, z, … Эти обозначения не являются обязательными, но если в условии не указано, какие буквы являются параметрами, а какие – неизвестны-

ми, то используются такие обозначения.

         Например, решить уравнение (4х – ах)а = 6х – 10 . Здесь х – неизвестное,    а – параметр.

        Что означает «решить задачу с параметром»?

        Решить задачу с параметром – значит, для каждого значения параметра а найти значение х, удовлетворяющие этой задаче, т.е. это зависит от вопроса в задаче.

Решить уравнение или неравенство с параметрами означает:

- определить, при каких значениях параметров существует решения;

- для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующее множество решений.

                         Какие основные типы задач с параметром?

          Тип 1. Уравнения, неравенства, которые необходимо решить либо для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговорённому множеству. Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами».

          Тип 2. Уравнения, неравенства, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра.

          Тип 3. Уравнения, неравенства, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения и неравенства имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений). Задачи типа 3 в каком-то смысле обратные задачам типа 2.

             Тип 4. Уравнения, неравенства, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

           Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;

2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решения второго уравнения и т.д.

           Основные способы решения задач с параметром.

           Способ 1. (аналитический) Этот способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные  способы нахождения ответа в задачах без параметра.

           Способ 2. (графический) В зависимости от задачи рассматриваются графики в координатной плоскости (х;у), или в координатной плоскости (х;а).

           Способ 3. (решение относительно параметра) При решении этим способом переменные х и а принимаются равноправными, и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признаётся более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных х и а и заканчиваем решение.

           Замечание. Существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы «ветвится» в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа – это сбор раннее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.

Рассмотрим примеры. 2.1.  Сравнить  -а и 5а.

 Решение. Надо рассмотреть три случая: если а < 0, то –а > 5а;

                                                                     если а = 0, то –а = 5а;

                                                                     если а > 0, то –а < 5а..

 Ответ. При а < 0 , –а > 5а; при а = 0 , –а = 5а; при а > 0,  -а < 5а.

1. Решить уравнение ах = 1.

Решение. Если а = 0, то уравнение не имеет решений.

                Если а ≠ 0, то х = 1/а.

Ответ. При а = 0 нет решений; при а ≠ 0,  х = 1/а.

1. Сравнить с и – 7с.
2. Решить уравнение  сх = 10

Тема 3.

                                  Линейные уравнения

Уравнения вида

                                                 ах = в,                                                (1)

где а, в – принадлежат множеству действительных чисел, а  х – неизвестное, называется линейным уравнением относительно х.

Схема исследования линейного уравнения (1).

     1.Если а ≠  0, в – любое действительное число. Уравнение имеет единственное решение х = в/а.

2. Если  а=0, в=0,  то уравнение примет вид 0 ∙ х = 0,  решением уравнения будет множество всех действительных чисел.

     3. Если а=0, в ≠ 0, то уравнение 0 ∙ х = в не имеет решений .

          Замечание. Если линейное уравнение не представлено в виде (1), то сначала нужно привести его к виду  (1) и только после этого проводить исследование.

Примеры. 3.1 Решить уравнение  (а -3)х = в+2а

Уравнение записано в виде (1).

Решение: Если а≠ 3, то уравнение имеет решение х = в+2а/ а-3 при любом в.

Значит единственное значение а, при котором могут отсутствовать решения уравнения, это а=3. В этом случае уравнение (а -3)х = в+2а принимает вид

0 ∙ х = в+6.  (2)

Если в≠ - 6, то уравнение (2) не имеет решений.

Если в = - 6, то любое х является решением (2).

Следовательно, в = - 6 единственное значение параметра в, при котором уравнение (1) имеет решение при любом а (х=2 при а ≠3 и х принадлежит множеству действительных чисел при а=3).

Ответ: в = -6.

3.2.  Решить уравнение 3(х-2а) = 4(1-х).

3.3.  Решить уравнение 3/kx-12=1/3x-k

3.4.  Решить уравнение (a2-1)x = a2 – a -2

3.5.  Решить уравнение  х2 + (2а +4)х +8а+1=0

Самостоятельная работа.

Вариант 1.  Решить уравнения:  а) вх + 2 =  - 1;

                                                       б)  (а – 1)х = а – 2;

                                                       в) (а2 – 1)х – а2 + 2а – 1 = 0.

Вариант 2.  Решить уравнения:  а) – 8 = вх + 1;

                                                       б) (а + 1)х = а – 1;

                                                       в) (9а2 – 4)х – 9а2 + 12а – 4 = 0.

Тема 4.

Линейные неравенства с параметром

              Неравенства

                                      ах > в,  ах <  в,   ах ≥  в,   ах ≤ в,

где а, в – выражения, зависящие от параметров, а  х – неизвестное, называются линейными неравенствами с параметрами.

              Решить неравенство с параметрами – значит для всех значений параметров найти множество решений неравенства.

Схема решения неравенства  ах > в.

1. Если а > 0, то х > в/а.
2. Если а < 0, то х < В/а.
3. Если а = 0, то неравенство примет вид  0 ∙ х > в. При в ≥ 0 неравенство не имеет решений; при в < 0 решением неравенства будет множество всех чисел.

             Схемы для решения остальных неравенств учащиеся делают самостоятельно.

             Примеры. 4.1. Решить неравенство а(3х-1)>3х – 2.

Решение: а(3х-1)>3х – 2, значит 3х(а-1)> а-2.

Рассмотрим три случая.

1. а=1, решением 0 ∙ х > -1 является любое действительное число.
2. а>1, 3х(а-1)> а-2, значит х > а-2/3 (а-1).
3. а< 1, 3х(а-1)> а-2, значит х < а-2/3 (а-1).

Ответ:  х > а-2/3 (а-1) при а>1; х < а-2/3 (а-1) при а< 1; х принадлежит множеству действительных чисел при а=1.

Решить неравенства. 4.2.   (а – 1)х >  а2 – 1.

1. 2ах +5  >   a+10x .
2. (а + 1)х – 3а + 1 ≤ 0.
3. Х2 +ах +1    >  0 .

 Самостоятельная работа.

Вариант 1. Решить неравенства: а) (а – 1)х ≤ а2 – 1;

                                                        б) 3х-а > ах – 2.

Вариант 2. Решить неравенства: а) (а – 1)х – 2а +3 ≥ 0;

                                                        б) ах-2в< вх+2а.

Тема 5.

Квадратные уравнения, содержащие  параметры. Теорема Виета.

                 Уравнение вида

                                                ах2 +вх + с = 0,                             (1)

где а,в,с – выражения,  зависящие от параметров, а ≠ 0, х – неизвестное, называется квадратным уравнением с параметрами.

Схема исследования квадратного уравнения (1).

1. Если а = 0, то имеем линейное уравнение вх +с = 0.
2. Если а ≠ 0 и дискриминант уравнения D = в2 – 4ас < 0, то уравнение не  имеет решений .
3. Если а ≠ 0 и D = 0, то уравнение имеет единственное решение х = - в/2а или как еще говорят, совпадающие корни х1 = х2 = - В/2а.
4. Если а ≠ 0 и D > 0, то уравнение имеет два различных корня х1,2= (- В ± √D)/2а

Примеры. 5.1. Для всех значений параметра а решить уравнение

                        (а – 1)х2 – 2ах + а + 2 = 0.

Решение. 1. а – 1 = 0, т.е. а = 1.Тогда уравнение примет вид  -2х + 3 = 0, х = 3/2.

2. а ≠ 1. Найдём дискриминант уравнения D = 4а2 – 4(а – 1)(а + 2) = - 4а + 8.

  Возможны случаи: а) D< 0, т. е. -4а + 8 < 0, 4а > 8, а > 2. Уравнение не имеет

                                        корней.

                                  б) D = 0, т.е. -4а + 8 = 0, 4а = 8, а = 2. Уравнение имеет один

                                       корень х = а /(а – 1) = 2/(2 – 1) = 2.

                                  в) D > 0, т.е. -4а + 8 > 0, 4а < 8, а < 2. Уравнение имеет два

                                      корня х1,2 = (2а ± √ -4а + 8)/2(а – 1) = (а ± √ 2 – а )/(а – 1)

Ответ. При  а = 1   х = 3/2;

            при  а =2    х = 2;

            при  а >2  нет корней;

            при  а < 2 и а ≠ 1    х1,2 = (а ± √ 2 – а )/(а – 1).

Для всех значений параметра решить уравнения:

1. ах2  + 3ах – а – 2 = 0;
2. ах2 +6х – 6 = 0;
3. вх2 – (в + 1)х +1 = 0;
4. ( в + 1)х2 – 2х + 1 – в  = 0.

Самостоятельная работа.

     Вариант 1. Решить уравнение  ах2 - (а+3)х + 3 = 0.

Вариант 2. Решить уравнение  а2 +(а+1)х + 2а-4 = 0.

Задачи.

1. . Найдите  все значения параметра а, для которых квадратное уравнение

(а -1)х2 + 2(2а + 1)х + 4а + 3 = 0 имеет два различных корня; не имеет корней; имеет один корень.

Решение. Данное уравнение по условию является квадратным, значит,

а – 1 ≠ 0, т.е. а ≠ 1. Найдём дискриминант D = 4(2а + 1)2 – 4(а – 1)(4а +3) =

= 4(4а2 + 4а + 1 – 4а2 + а + 3) = 4(5а + 4).

Имеем: 1) При а ≠ 1 и D > 0, т.е. 4(5а + 4) > 0, а > - 4/5 уравнение имеет два

                  различных корня.

                  2) При а ≠ 1 и D < 0, т.е. а < -4/5 уравнение не имеет корней.

                   3) При а ≠ 1 и D = 0, т.е. а = -4/5 уравнение имеет один корень.

Ответ. Если а > - 4/5 и а ≠ 1, то уравнение имеет два различных корня;

            если а < -4/5, то уравнение не имеет корней;

            если а = -4/5, то уравнение имеет один корень.

1. .При каких значениях параметра а уравнение (а + 6)х2 + 2ах +1 = 0 имеет единственное решение?
2. .При каких значениях параметра а уравнение (а2 – а – 2)х2 + (а +1)х + 1 = 0 не имеет решений?
3. .При каких значениях параметра а уравнение ах2- (2а+3)х+а+5=0  имеет два различных корня?

Самостоятельная работа.

Вариант 1. Найдите  все значения параметра а, для которых квадратное уравнение  (2а – 1)х2 +2х – 1 = 0 имеет два различных корня; не имеет корней; имеет один корень.

Вариант 2. . Найдите  все значения параметра а, для которых квадратное уравнение  (1 – а)х2 +4х – 3  = 0 имеет два различных корня; не имеет корней; имеет один корень.

Теорема Виета.

                 При решении многих задач, связанных с квадратными уравнениями, содержащими параметры, используются следующие теоремы.

Теорема Виета. Если х1, х2 – корни квадратного уравнения ах2 + вх +с = 0, а≠0, то х1 + х2 = -В/а  и  х1 ∙ х2 = С/а.

Теорема 1. Для того, чтобы корни квадратного трёхчлена ах2 +вх +с были действительны и имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:  D = в2 – 4ас ≥ 0,   х1 ∙ х2 = С/А> 0.

           При этом оба корня будут положительны, если х1 + х2 = -В/а  > 0, и оба корня будут отрицательны, если х1 + х2 = -В/а  < 0.

Теорема 2. Для того, чтобы корни квадратного трёхчлена ах2 + вх + с были действительны и оба неотрицательны или оба неположительные, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:  D = в2 – 4ас ≥ 0,   х1 ∙ х2 = С/а≥ 0.

                   При этом оба корня будут неотрицательны, если х1 + х2 = -В/а  ≥ 0, и оба корня будут неположительные, если х1 + х2 = -В/а  ≤ 0.

Теорема 3. Для того, чтобы корни квадратного трёхчлена ах2 + вх + с были действительны и имели разные знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих условия: х1 ∙ х2 = С/а< 0.

                  При этом условие D = в2 – 4ас > 0 выполняется автоматически.

Примечание. Эти теоремы играют важную роль при решении задач, связанных с исследованием знаков корней уравнения ах2 + вх + с = 0.

Полезные равенства:    х12 + х22 = (х1 + х2)2 – 2х1х2 ,                                    (1)

   х13 + х23 = (х1 + х2)( х12 – х1х2 + х22) = (х1 + х2)((х1 + х2)2 – 3х1х2),                 (2)

                                       (х1 - х2)2 = (х1 + х2)2 – 4х1х2 ,                                       (3)

                                                                                   (4)

                                                                                  (5)

5.10. При каких значениях параметра а  квадратное уравнение

  (а – 1)х2 – 2ах + а +1 = 0 имеет: а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) корни разных знаков?

Решение. Уравнение квадратное,  значит, а ≠ 1. По теореме Виета имеем

                            х1 + х2 = 2а/(а – 1) ,    х1х2 = (а + 1)/(а – 1) .

    Вычислим дискриминант D = 4а2 – 4(а – 1)(а + 1) = 4.

а) Согласно  теоремы 1 уравнение имеет положительные корни, если

    D ≥ 0,   х1х2 > 0,    х1 + х2 > 0, т.е.        (а + 1)/(а – 1) > 0 ,     2а/(а – 1)  > 0.

Отсюда а є ( -1; 0).

б) Согласно  теоремы 1 уравнение имеет отрицательные корни, если

    D ≥ 0,   х1х2 > 0,    х1 + х2 < 0, т.е.        (а + 1)/(а – 1) > 0 ,     2а/(а – 1)  < 0.

Отсюда а є (0; 1).

в) Согласно теоремы 3 уравнение имеет корни разных знаков, если х1х2 < 0,т.е.

       (а + 1)/(а – 1) < 0.    Отсюда а є (-1; 1).

Ответ. а) при а є ( -1; 0) уравнение имеет положительные корни;

              б) при а є (0; 1) уравнение имеет отрицательные корни;

              в) при а є (-1; 1) уравнение имеет корни разных знаков.

5.11. При каких значениях параметра а    квадратное уравнение

      (а – 1)х2 – 2(а +1)х + а +3 = 0 имеет: а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) корни разных знаков?

5.12. Не решая уравнения 3х2 – (в + 1)х – 3в2 +0, найдите х1-1 + х2-1, где х1, х2 – корни уравнения.

5.13. При каких значениях параметра а уравнение х2 – 2(а + 1)х + а2 = 0 имеет корни, сумма квадратов которых равна 4.

Контрольная работа.

Вариант 1.  1. Решить уравнение (а2 +4а)х = 2а + 8.

                2. Решить неравенство (в + 1)х ≥ (в2 – 1).

                     3. При каких значениях параметра а  уравнение

                         х2 – (2а +1)х + а2 + а – 6  = 0 имеет: а) два положительных корня;     б) два   отрицательных корня; в) корни разных знаков?

Вариант 2.  1. Решить уравнение (а2 – 2а)х = 3а.

                    2. Решить неравенство (а + 2)х ≤ а2 – 4.

                    3. При каких значениях параметра в  уравнение

                         х2 – (2в – 1)х + в2 – т  – 2  = 0 имеет: а) два положительных корня;       б) два   отрицательных корня; в) корни разных знаков?

Литература.

1. В.В. Мочалов, В.В. Сильвестров. Уравнения и неравенства с параметрами. Ч.:Изд-во ЧГУ, 2004. – 175с.
2. Ястребинский Г.А. Задачи  с параметрами. М.: Просвещение, 1986, - 128 с.
3. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 – 11 классов среднй школы. М.: Просвещение, 1991. – 351 с.
4. Т. Пескова. Первое знакомство с параметрами в уравнениях. Учебно-методическая газета «Математика». №36, 1999.
5. Т. Косякова. Решение линейных и квадратных неравенств, содержащих параметры. 9 кл. Учебно-методическая газета «Математика».№ 25 – 26, № 27 – 28. 2004.
6. Т. Горшенина. Задачи с параметром. 8 кл. Учебно-методическая газета «Математика». №16. 2004.
7. Ш. Цыганов. Квадратные трёхчлены и параметры. Учебно-методическая газета «Математика». №5. 1999.
8. С. Неделяева. Особенности решения задач с параметром. Учебно-методическая газета «Математика». №34. 1999.

      9. В.В. Локоть Задачи с параметрами. Линейные и квадратные уравнения, неравенства,  системы. Учебно-методическое пособие .Москва 2005.